

# 高等学校数学における発展的学習の考察とその背景Ⅱ

## ～4数ゲームについて～

Advanced materials for high school mathematics and their backgroundⅡ

— the four number game —

2018 年 10 月 24 日受理

北山 秀隆

Hidetaka KITAYAMA  
(和歌山大学教育学部)

松山 ともこ

Tomoko MATSUYAMA  
(紀の川市教育委員会)

西山 尚志

Hisashi NISHIYAMA  
(和歌山大学教育学部)

本稿では、高等学校数学での発展的学習として、「4数ゲーム」と呼ばれる題材について議論する。この「4数ゲーム」は、高校生でも容易にルールを理解して取り組めるものであるが、実は非常に奥が深い。その規則性を考えることは、生徒の数学的思考力を養う数学的活動として適した教材であることを紹介し、その内容を詳細に記述する。

## 1 はじめに

平成 30 年に公示された高等学校学習指導要領では、数学的活動の重要性が特に強調されている。数学的活動とは、「事象を数理的に捉え、数学の問題を見いだし、問題を自立的、協働的に解決する過程を遂行すること」とされている。特に、数学 A の内容に「数学と人間の活動」が位置付けられ、「数学史的な話題、数理的なゲームやパズルなどを通して、数学と文化との関わりについての理解を深めるとともに、パズルなどに数学的な要素を見いだし、目的に応じて数学を活用して考察すること」が掲げられている。また、「数学と遊びにも深い関係があり、ここでは遊びの中に数学が顕在する例として、論理的な思考を必要とする数理的なゲームやパズルなどを取り扱い、戦法などを考えさせることを通して論理的に考えることのよさや、数学と文化との関わりを理解できるようにする」ことが必要とされる。

本稿では、そのような数学的活動となりうる数理的ゲームの一例として、次節で説明する「4数ゲーム」を取り上げる。[2] など「4数ゲーム」の教材化を考察した論文はこれまでも有るが、本稿は主に

- [1] や [3] で証明されている理論的側面を記述すること
- 「4数ゲーム」の一般化として「 $k$ 数ゲーム」についても記述すること

を目的としている。ゲームの規則性や戦法などを考察する生徒の活動をサポートするためには、その内容に関する理論的側面の知識がどうしても必要となるが、古い文献や外国の論文まで調べ尽くすことは、多忙な現場の教員にとっては時間的にも現実的にはかなり難しい。本稿は、そういった理論的側面の利用しやすい資料の一つとなることを目指したものである。

## 2 4数ゲーム

0 以上の 4 つの整数  $a, b, c, d$  を選び、4 つ組  $(a, b, c, d)$  を考える。この  $(a, b, c, d)$  からスタートして、隣同士の数の差を取るという操作を繰り返す。例えば、 $(2, 0, 1, 8)$  からスタートすると

$$\begin{aligned} (2, 0, 1, 8) &\mapsto (2, 1, 7, 6) \mapsto (1, 6, 1, 4) \mapsto (5, 5, 3, 3) \\ &\mapsto (0, 2, 0, 2) \mapsto (2, 2, 2, 2) \mapsto (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

となり、6 ステップで  $(0, 0, 0, 0)$  になる。クラスで一番長い列を見つけた人が勝ちというゲームである。試してみるとわかるが、意外とあっさり  $(0, 0, 0, 0)$  になってしまい、長い列を作るのは結構難しい。例えば、0 以上 99 以下の整数の 4 つ組をランダムに発生させて 20 回実験してみると

| スタートする 4 つ組      | ステップの長さ | スタートする 4 つ組      | ステップの長さ |
|------------------|---------|------------------|---------|
| (81, 53, 39, 41) | 6       | (82, 33, 36, 82) | 4       |
| (85, 8, 28, 44)  | 7       | (41, 80, 29, 60) | 4       |
| (77, 34, 36, 7)  | 4       | (65, 38, 61, 68) | 6       |
| (86, 3, 3, 49)   | 4       | (44, 32, 25, 44) | 4       |
| (36, 57, 49, 15) | 4       | (26, 85, 99, 5)  | 5       |
| (78, 38, 42, 61) | 5       | (55, 91, 99, 14) | 6       |
| (6, 51, 95, 21)  | 4       | (45, 52, 95, 51) | 6       |
| (60, 4, 47, 79)  | 6       | (73, 0, 84, 61)  | 4       |
| (15, 80, 49, 52) | 4       | (94, 76, 62, 92) | 4       |
| (53, 17, 26, 26) | 4       | (91, 59, 57, 75) | 4       |

となり、あまり長くは続かない。実際、筆者の一人がある高等学校の教室 80 人を対象に、何でも良いからまずは各自 1 組選んで計算させてみたところ、8 ステップというのが最大だった。長い列を見つけた方が勝ちというルールを説明して考えさせると、徐々に 10 ステップを超える生徒が現れ始める。「大きい数を並べるべきだ」、「(大, 小, 大, 小) のように交互にするべきでは?」、「もしや素数を並べるのでは?」など、生徒はさまざまなアイデアを出して考えていた。このように、生徒が自然に思考錯誤を始められるような数学ゲームが、数学的活動の題材としてふさわしい。

### 3 理論的側面

#### 3.1 文字式を使って

文字式を使って計算してみると、状況を理解しやすい。(2, 0, 1, 8) の場合、(2, 0, 1, 8), (0, 1, 8, 2), (1, 8, 2, 0), (8, 2, 0, 1) は書き方が違うだけで本質的に同じものであるから、一般に  $(a, b, c, d)$  と書いたとき、 $a, b, c, d$  の中で  $a$  が最小として一般性を失わない。さらに、 $(a, b, c, d)$  と  $(a, d, c, b)$  は本質的に同じであることにも注意しよう。すると、あり得る大小関係のパターンは、次の 3 通りである。

$$(i) a \leq b \leq c \leq d, \quad (ii) a \leq c \leq b \leq d, \quad (iii) a \leq d \leq b \leq c$$

**定理 1.**  $(i) a \leq b \leq c \leq d$  の場合以外は、ステップの長さは 6 以下である。

*Proof.*  $(ii) a \leq c \leq b \leq d$  のとき

$$\begin{aligned} (a, b, c, d) &\mapsto (b-a, b-c, d-c, d-a) \\ &\mapsto (c-a, d-b, c-a, d-b) \\ &\mapsto (|c-a-d+b|, |d-b-c+a|, |c-a-d+b|, |c-a-d+b|) \\ &\mapsto (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

で高々 4 ステップで  $(0, 0, 0, 0)$  になる。

$(iii) a \leq d \leq b \leq c$  のとき

$$\begin{aligned} (a, b, c, d) &\mapsto (b-a, c-b, c-d, d-a) \\ &\mapsto (|a+c-2b|, b-d, |a+c-2d|, b-d) \end{aligned}$$

複雑になるので、これを  $(A, B, C, B)$  と表すと

$$\begin{aligned} &\mapsto (|A-B|, |B-C|, |B-C|, |A-B|) \\ &\mapsto (||A-B|-|B-C||, 0, ||A-B|-|B-C||, 0) \\ &\mapsto (||A-B|-|B-C||, ||A-B|-|B-C||, ||A-B|-|B-C||, ||A-B|-|B-C||) \\ &\mapsto (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

で高々 6 ステップで  $(0, 0, 0, 0)$  になる。 □

$a \leq b \leq c \leq d$  を満たすとき,  $(a, b, c, d)$  を単調型と呼ぶことにする。定理 1 より, 長いステップを探すためには, 単調型の 4 つ組からスタートしなければならないことが分かる。

### 3.2 必ず $(0, 0, 0, 0)$ になるのか？

ここまで, 最終的に  $(0, 0, 0, 0)$  になることを前提として話を進めてきたが, そもそも, 4 数ゲームは必ず  $(0, 0, 0, 0)$  になるのかどうかは自明ではない。実際, 4 数ゲームではなく 3 数ゲームだとすると, 例えば  $(1, 1, 0)$  からスタートすると

$$(1, 1, 0) \mapsto (0, 1, 1) \mapsto (1, 0, 1) \mapsto (1, 1, 0) \mapsto \cdots$$

というループにはまってしまい, 永遠に  $(0, 0, 0, 0)$  になることはない。4 数ゲームの場合は, 実はそうはならないことが次のように証明できる。ここで, 4 つ組  $S = (a, b, c, d)$  に対し,  $a, b, c, d$  の最大値を  $|S|$  と表すことにする。

**定理 2.** 4 数ゲームは有限回のステップで必ず  $(0, 0, 0, 0)$  になる。

*Proof.*  $A_0 = (a, b, c, d)$  からスタートして  $n$  ステップ後の 4 つ組を  $A_n$  と書くと,  $A_1 = (|a - b|, |b - c|, |c - d|, |d - a|)$  であるので,  $|a - b| \leq \max\{a, b\}$  などにより,

$$|A_1| = \max\{|a - b|, |b - c|, |c - d|, |d - a|\} \leq \max\{a, b, c, d\} = |A_0|.$$

よって,  $|A_0| \geq |A_1| \geq |A_2| \geq \cdots$  となる。  $\cdots$  ①

次に, 4 つ組の偶奇に着目する。2 で割った余りで考えると, 本質的には,

$$(0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)$$

のどれかである。このとき, 4 数ゲームの動きは

$$(1, 0, 0, 0) \mapsto (1, 0, 0, 1) \mapsto (1, 0, 1, 0) \mapsto (1, 1, 1, 1) \mapsto (0, 0, 0, 0) \mapsto (0, 0, 0, 0) \mapsto \cdots$$

$$(1, 1, 1, 0) \mapsto (0, 0, 1, 1) \mapsto (0, 1, 0, 1) \mapsto (1, 1, 1, 1) \mapsto (0, 0, 0, 0) \mapsto (0, 0, 0, 0) \mapsto \cdots$$

であるから,  $A_0$  がどんな偶奇の組み合わせであっても,  $A_4$  の 4 数はすべて偶数となる。さらに,  $A_4$  の 4 数を 2 で割ってできる 4 つ組を  $\frac{1}{2}A_4$  というふうに表すことにすると, 同様にして,  $\frac{1}{2}A_8$  の 4 数はどれも偶数となることが分かる。よって,  $A_{4n}$  の 4 数はどれも  $2^n$  の倍数であることが分かる。  $\cdots$  ②

①, ② より, 有限回のステップで  $(0, 0, 0, 0)$  にならなければならない。 □

### 3.3 長い列を作るには？

長い列を見つけるための方法は, 実は意外なところから出てくる。フィボナッチ数列は教材としてもよく取り上げられる有名なものであるが, その類似物でトリボナッチ数列と呼ばれるものがある。トリボナッチ数列  $\{T_n\}$  とは

$$T_0 = 0, \quad T_1 = 1, \quad T_2 = 1, \quad T_{n+3} = T_n + T_{n+1} + T_{n+2}$$

で定義される数列で, 具体的には

$$0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, \cdots$$

と続いていく。フィボナッチ数列は隣接 2 項の和が次の項になるが, このトリボナッチ数列は隣接 3 項の和が次の項になる。実はこのトリボナッチ数列が長いステップを作るための鍵になる。

**定理 3.**  $(T_{n-3}, T_{n-2}, T_{n-1}, T_n)$  からスタートしたとき, ステップの長さは  $3 \times \lceil \frac{n}{2} \rceil$  になる。ここで,  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  は  $\frac{n}{2}$  を超えない最大の整数を表す。

*Proof.*  $\mathbb{T}_n := (T_{n-3}, T_{n-2}, T_{n-1}, T_n)$  とおくと

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_n &\mapsto (T_{n-2} - T_{n-3}, T_{n-1} - T_{n-2}, T_n - T_{n-1}, T_n - T_{n-3}) \\ &= (T_{n-4} + T_{n-5}, T_{n-3} + T_{n-4}, T_{n-2} + T_{n-3}, T_{n-1} + T_{n-2}) \\ &\mapsto (T_{n-3} - T_{n-5}, T_{n-2} - T_{n-4}, T_{n-1} - T_{n-3}, T_{n-1} + T_{n-2} - T_{n-4} - T_{n-5}) \\ &= (T_{n-4} + T_{n-6}, T_{n-3} + T_{n-5}, T_{n-2} + T_{n-4}, T_{n-1} + T_{n-3}) \\ &\mapsto (T_{n-3} + T_{n-5} - T_{n-4} - T_{n-6}, T_{n-2} + T_{n-4} - T_{n-3} - T_{n-5}, \\ &\quad T_{n-1} + T_{n-3} - T_{n-2} - T_{n-4}, T_{n-1} + T_{n-3} - T_{n-4} - T_{n-6}) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} T_{n-3} + T_{n-5} - T_{n-4} - T_{n-6} &= T_{n-5} + (T_{n-3} - T_{n-4} - T_{n-6}) = T_{n-5} + T_{n-5} = 2T_{n-5} \\ T_{n-2} + T_{n-4} - T_{n-3} - T_{n-5} &= T_{n-4} + (T_{n-2} - T_{n-3} - T_{n-5}) = T_{n-4} + T_{n-4} = 2T_{n-4} \\ T_{n-1} + T_{n-3} - T_{n-2} - T_{n-4} &= T_{n-3} + (T_{n-1} - T_{n-2} - T_{n-4}) = T_{n-3} + T_{n-3} = 2T_{n-3} \\ T_{n-1} + T_{n-3} - T_{n-4} - T_{n-6} &= T_{n-1} + T_{n-5} = T_{n-2} + T_{n-3} + T_{n-4} + T_{n-5} = 2T_{n-2} \end{aligned}$$

であるので, つまり  $\mathbb{T}_n$  は 3 ステップ後に  $2\mathbb{T}_{n-2}$  になる。

$n$  が奇数のとき,  $\mathbb{T}_n$  は  $3 \times \frac{n-3}{2}$  ステップ後に  $(2 \text{ の累乗を無視すると }) \mathbb{T}_3 = (0, 1, 1, 2)$  になり, その後,  $(0, 1, 1, 2) \mapsto (1, 0, 1, 2) \mapsto (1, 1, 1, 1) \mapsto (0, 0, 0, 0)$  であるから,  $\mathbb{T}_n$  からスタートしてちょうど  $3 \times \frac{n-1}{2} = 3 \lceil \frac{n}{2} \rceil$  ステップで  $(0, 0, 0, 0)$  になる。

$n$  が偶数のとき,  $\mathbb{T}_n$  は  $3 \times \frac{n-4}{2}$  ステップ後に  $\mathbb{T}_4 = (1, 1, 2, 4)$  になり, その後,  $(1, 1, 2, 4) \mapsto (0, 1, 2, 3) \mapsto (1, 1, 1, 3) \mapsto (0, 0, 2, 2) \mapsto (0, 2, 0, 2) \mapsto (2, 2, 2, 2) \mapsto (0, 0, 0, 0)$  であるから,  $\mathbb{T}_n$  からスタートしてちょうど  $3 \times \frac{n}{2}$  ステップで  $(0, 0, 0, 0)$  になる。□

$n$  はいくらでも大きくできるので, 定理 3 を用いれば, ステップの長さはいくらでも長くできることが分かる。例えば

$$\begin{aligned} (24, 44, 81, 149) &\rightarrow (20, 37, 68, 125) \rightarrow (17, 31, 57, 105) \rightarrow (14, 26, 48, 88) \\ &\rightarrow (12, 22, 40, 74) \rightarrow (10, 18, 34, 62) \rightarrow (8, 16, 28, 52) \rightarrow (8, 12, 24, 44) \\ &\rightarrow (4, 12, 20, 36) \rightarrow (8, 8, 16, 32) \rightarrow (0, 8, 16, 24) \rightarrow (8, 8, 8, 24) \\ &\rightarrow (0, 0, 16, 16) \rightarrow (0, 16, 0, 16) \rightarrow (16, 16, 16, 16) \rightarrow (0, 0, 0, 0) : 15 \text{ ステップ} \end{aligned}$$

### 3.4 この作り方がベストなのか？

定理 3 で示したように,  $\mathbb{T}_n = (T_{n-3}, T_{n-2}, T_{n-1}, T_n)$  からスタートしたとき, ステップの長さは  $3 \lceil \frac{n}{2} \rceil$  となる。この節では, 並べる数の大きさとステップの長さとの関係という意味で, 実質的にこの方法が最良であることを示す。(定理 6)

4 つ組  $S = (a, b, c, d)$  が  $a \leq b \leq c \leq d$  を満たすとき,  $S$  は単調型であると言う。 $S$  が単調型で  $d = a + b + c$  を満たすとき,  $S$  は加法的であると言う。

ここで, 4 つ組  $S_1$  から始めて  $n - 1$  ステップ後の 4 つ組を  $S_n$  と表すとき, 次の補題が成り立つ。

**補題 4.**  $S_1, S_2, \dots, S_{10}$  はすべて単調型で,  $S_1$  は加法的でかつ  $|S_1| \leq T_n$  とする。このとき,  $|S_4| \leq 2T_{n-2}$  または  $|S_7| \leq 4T_{n-4}$  または  $|S_{10}| \leq 8T_{n-6}$  が成り立つ。

*Proof.*  $S_1 = (a, b, c, a+b+c)$ ,  $a \leq b \leq c$  とする。 $S_2, \dots, S_{10}$  はすべて単調型であることより

$$S_2 = (b-a, c-b, a+b, b+c)$$

$$S_3 = (a-2b+c, a+2b-c, c-a, c+a)$$

$$S_4 = (4b-2c, -2a-2b+2c, 2a, 2b)$$

$$S_5 = (-2a-6b+4c, 4a+2b-2c, -2a+2b, -2b+2c)$$

$$S_6 = (6a+8b-6c, -6a+2c, 2a-4b+2c, 2a+4b-2c)$$

$$S_7 = (-12a-8b+8c, 8a-4b, 8b-4c, -4a-4b+4c)$$

$$S_8 = (20a+4b-8c, -8a+12b-4c, -4a-12b+8c, 8a+4b-4c)$$

$$S_9 = (-28a+8b+4c, 4a-24b+12c, 12a+16b-12c, -12a+4c)$$

$$S_{10} = (32a-32b+8c, 8a+40b-24c, -24a-16b+16c, 16a-8b)$$

と求めていくことができ,  $|S_4| = 2b$ ,  $|S_7| = -4a-4b+4c$ ,  $|S_{10}| = 16a-8b$  となる。ここで,  $|S_4| > 2T_{n-2}$ ,  $|S_7| > 4T_{n-4}$ ,  $|S_{10}| > 8T_{n-6}$  と仮定すると,

$$\begin{cases} 3b \geq 3T_{n-2} + 3, \\ -a-b+c \geq T_{n-4} + 1, \\ 2a-b \geq T_{n-6} + 1 \end{cases}$$

となるので, 辺々足すと,  $a+b+c \geq 3T_{n-2}+T_{n-4}+T_{n-6}+5$  となる。条件より  $a+b+c = |S_1| \leq T_n$  であるので, これは

$$T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3} \geq 3T_{n-2} + T_{n-4} + T_{n-6} + 5$$

となる。よって, トリボナッチ数列の定義の漸化式より,

$$\begin{aligned} 2T_{n-3} &\geq -2T_{n-2} - T_{n-4} + 3T_{n-2} + T_{n-4} + T_{n-6} + 5 \\ &= T_{n-2} + T_{n-6} + 5 \\ &= (T_{n-3} + T_{n-4} + T_{n-5}) + (T_{n-3} - T_{n-4} - T_{n-5}) + 5 \\ &= 2T_{n-3} + 5 \end{aligned}$$

となるので矛盾。 □

4 つ組  $S$  に対して,  $S$  からスタートしたときのステップの長さを  $L(S)$  と表すことにする。

**補題 5.**  $S_1$  が加法的で  $|S_1| \leq T_n$  ならば,  $L(S_1) \leq L(\mathbb{T}_n)$ .

*Proof.*  $n = 2, 3, \dots, 9$  については,  $|S_1| \leq T_n$  を満たすすべての加法的な  $S_1$  に対して  $L(S_1) \leq L(\mathbb{T}_n)$  であることをコンピュータでチェックできる。(例えば,  $n = 5$  のとき,  $|S_1| \leq T_5$  を満たす加法的な  $S_1$  は有限個しか無いので, そのすべてに対して  $L(S_1) \leq L(\mathbb{T}_5)$  をチェックすればよい。) 以下  $n \geq 10$  とし,  $k < n$  なる  $k$  について定理が成り立っていると仮定した上で,  $k = n$  のときの成立を示す。(数学的帰納法)

(I)  $S_1, S_2, \dots, S_{10}$  がすべて単調型とすると, 補題 4 より  $|S_4| \leq 2T_{n-2}$ ,  $|S_7| \leq 4T_{n-4}$ ,  $|S_{10}| \leq 8T_{n-6}$  のどれかが成立する。 $|S_4| \leq 2T_{n-2}$  とする。定理 2 の証明で出てきたように,  $S_4$  の 4 数はすべて偶数になっているので,  $S_4^* = \frac{1}{2}S_4$  と定義できる。 $|S_4^*| \leq T_{n-2}$  でありかつ  $S_4^*$  は加法的であることに注意すると, 仮定より

$$L(S_4) = L(S_4^*) \leq L(\mathbb{T}_{n-2}) = 3 \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil.$$

よって

$$L(S_1) = L(S_4) + 3 \leq 3 \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil + 3 = 3 \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = L(\mathbb{T}_n).$$

$|S_7| \leq 4T_{n-4}$ ,  $|S_{10}| \leq 8T_{n-6}$  の場合も同様に  $L(S_1) \leq L(\mathbb{T}_n)$  を得る。

(II)  $S_1, S_2, \dots, S_{10}$  の中に単調型でない  $S_j$  が有るとすると, 定理 1 より  $L(S_j) \leq 6$  であるから

$$L(S_1) = L(S_j) + (j-1) \leq 6 + (j-1) = j+5 \leq 15.$$

一方,  $n \geq 10$  より  $L(\mathbb{T}_n) = 3 \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \geq 15$ . よって,  $L(S_1) \leq L(\mathbb{T}_n)$ .  $\square$

**定理 6.**  $|S| \leq T_n$  を満たす  $S$  について,  $L(S) \leq L(\mathbb{T}_n) + 1 = 3 \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  が成り立つ。(  $S = (0, T_{n-3}, T_{n-3} + T_{n-2}, T_n)$  のとき,  $L(S) = L(\mathbb{T}_n) + 1$  で等号が成立。)

*Proof.*  $S_0$  が単調型で  $|S_0| \leq T_n$  ならば,  $S_1$  は加法的でかつ  $|S_1| \leq T_n$  なので, 補題 5 より  $L(S_0) = L(S_1) + 1 \leq L(\mathbb{T}_n) + 1$  となる。 $S_0$  が単調型でなければ, 定理 1 より  $L(S_0) \leq 6$  であり,  $n \geq 4$  については  $L(S_0) < 3 \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  となる。 $n \leq 3$  については全通りをチェックすればよい。  $\square$

## 4 $k$ 数ゲーム

4 数ゲームに限らず, 一般に  $k$  数ゲームを考えたらどうなるだろうか。この節は少しややこしくなるので, 結論だけ知りたい読者のために先に結論を書いておく。この節の結論は定理 9 と定理 10 で, つまり, 4 数, 8 数, 16 数,  $\dots$  など  $k$  が 2 の累乗のときは,  $k$  数ゲームは有限回のステップで  $(0, 0, \dots, 0)$  に到達する。逆に,  $k$  が 2 の累乗でないとき,  $k$  数ゲームは一般には  $(0, 0, \dots, 0)$  には到達しない。

では以下, このことの証明を述べる。まず, 2 つの補題を用意する。 $A_0 = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  とし,  $n$  ステップ後の  $k$  つ組を  $A_n = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_k^{(n)})$  と表す。

**補題 7.**  $a_i^{(n)} \equiv \sum_{j=0}^n {}_n C_j \cdot a_{i+n-j} \pmod{2}$  が任意の  $i = 1, 2, \dots, k$  と 自然数  $n$  に対して成り立つ。

*Proof.*  $n = 1$  のとき, 任意の  $i$  について

$$a_i^{(1)} = |a_{i+1} - a_i| \equiv a_{i+1} + a_i = \sum_{j=0}^1 {}_1 C_j \cdot a_{i+1-j} \pmod{2}$$

となり, 補題は成立する。

$n = l$  のとき, 任意の  $i$  について補題が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned} a_i^{(l+1)} &= |a_{i+1}^{(l)} - a_i^{(l)}| \\ &\equiv a_{i+1}^{(l)} + a_i^{(l)} \pmod{2} \\ &= \sum_{j=0}^l {}_l C_j \cdot a_{i+l-j} + \sum_{j=0}^l {}_l C_j \cdot a_{i+l-j} \\ &= a_{i+l} + \sum_{j=1}^l ({}_l C_{j-1} + {}_l C_j) a_{i+l-j} + a_i \end{aligned}$$

ここで  ${}_l C_{j-1} + {}_l C_j = {}_{l+1} C_j$  であるので

$$\begin{aligned} &= a_{i+l} + \sum_{j=1}^l {}_{l+1} C_j \cdot a_{i+l-j} + a_i \\ &= \sum_{j=0}^{l+1} {}_{l+1} C_j \cdot a_{i+l+1-j} \end{aligned}$$

となり,  $n = l+1$  のときにも任意の  $i$  について成立する。よって, 数学的帰納法により, 任意の  $n$  について補題は成立する。  $\square$

**補題 8.**  $n$  が 2 の累乗のとき、任意の  $i = 1, 2, \dots, k$  について、 $a_i^{(n)} \equiv a_{i+n} + a_i \pmod{2}$  が成り立つ。

*Proof.*  $n = 2^r$  と表すと

$${}_nC_j = \frac{2^r \cdot (2^r - 1)(2^r - 2) \cdots (2^r - j + 1)}{j!} = \frac{2^r}{j} \prod_{\alpha=1}^{j-1} \frac{2^r - \alpha}{\alpha}$$

と書ける。 $0 < j < n$  なる任意の  $j$  について、 $j$  は 2 で  $r$  回未満しか割れない。各  $\alpha$  に対して  $\frac{2^r - \alpha}{\alpha}$  を考えると、 $\alpha$  が 2 で  $s$  回割れるとき、 $2^r - \alpha$  も 2 で  $s$  回割れるので、 $\frac{2^r - \alpha}{\alpha}$  を約分したとき分母は奇数になる。以上より、 ${}_nC_j$  を約分したとき、分母は奇数で分子は偶数になることが分かるので、 $0 < j < n$  なる  $j$  について  ${}_nC_j \equiv 0 \pmod{2}$ 。よって、補題 7 より成立する。  $\square$

補題 8 により、次の定理を得る。

**定理 9.**  $k$  が 2 の累乗のとき、 $k$  数ゲームは有限回のステップで  $(0, 0, \dots, 0)$  になる。

*Proof.* 補題 8 より

$$a_i^{(k)} \equiv a_{i+k} + a_i = 2a_i \equiv 0 \pmod{2}$$

従って、定理 2 の証明のときと同様に、任意の自然数  $t$  に対して、 $A_{tk}$  のすべての数は  $2^t$  の倍数になっている。よって、定理 2 の証明のときと同じ理由で、 $A_{tk}$  がすべて 0 となる  $t$  が存在する。  $\square$

**定理 10.**  $k$  が 2 の累乗でないとき、 $k$  数ゲームは有限回のステップで  $(0, 0, \dots, 0)$  になるとは限らない。

*Proof.*  $k = 2^\alpha \cdot \beta$  ( $\alpha \geq 0$ ,  $\beta$  は 3 以上の奇数) と表す。 $A_0 = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  からスタートし、 $n$  ステップで  $(0, 0, \dots, 0)$  になると仮定する。2 と  $\beta$  は互いに素なので、オイラーの定理より

$$2^{\varphi(\beta)} \equiv 1 \pmod{\beta}.$$

ここで  $\varphi$  はオイラー関数を表す。任意の  $\lambda$  に対して

$$2^{\lambda\varphi(\beta)} \equiv 1 \pmod{\beta}.$$

$2^\alpha$  をかけて

$$2^{\lambda\varphi(\beta)+\alpha} \equiv 2^\alpha \pmod{k}. \quad (1)$$

となる。 $m := 2^{\lambda\varphi(\beta)+\alpha} \geq n$  となるように  $\lambda$  をとっておくと、 $A_0$  からスタートした  $m$  回のステップで  $(0, 0, \dots, 0)$  になるので、補題 8 より

$$0 = a_i^{(m)} \equiv a_{i+m} + a_i \pmod{2}$$

(1) より  $m \equiv 2^\alpha \pmod{k}$  であるので、

$$a_{i+2^\alpha} \equiv a_i \pmod{2} \quad (2)$$

が任意の  $i = 1, 2, \dots, k$  について成立する。 $2^\alpha \not\equiv 0 \pmod{k}$  であることに注意すると、(2) を満たさない  $k$  数  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  は存在し、そのような  $k$  数からスタートする  $k$  数ゲームは  $(0, 0, \dots, 0)$  にならない。  $\square$

## 参考文献

- [1] B. Freedman, *The Four Number Game*, Scripta Math. **14** (1948), 35–47.
- [2] 伊禮三之, 「4 数ゲーム」の教材化について, 教師教育研究 **1** (2007), 207–219.
- [3] W. Webb, *The Length of the four-number game*, Fibonacci Quart. **20** (1982), 33–35.

